Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-284-289
УДК 517.95

О сопряженных операторах для операторов дробного дифференцирования

Гарик Гагикович ПЕТРОСЯН
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий»
394036, Российская Федерация, г. Воронеж, проспект Революции, 19

On adjoint operators for fractional differentiation operators

Garik G. PETROSYAN
Voronezh State University of Engineering Technologies
19, Revolutsii Prospect, Voronezh, 394036, Russian Federation

Аннотация. На линейном многообразии пространства суммируемых с квадратом на конечном отрезке функций, обнуляющихся в его концах, рассматривается оператор левостороннего дробного дифференцирования Капуто. Показано, что сопряженным для этого оператора является оператор правостороннего дробного дифференцирования Капуто. Аналогичные результаты устанавливаются для операторов дробного дифференцирования Римана–Лиувилля. Также мы показываем, что оператор, представляющийся в виде суммы левостороннего и правостороннего операторов дробного дифференцирования, является самосопряженным. Для обоснования результатов используются известные свойства дробных производных Капуто и Римана–Лиувилля.

Ключевые слова: дробная производная Капуто; дробная производная Римана–Лиувилля; сопряженный оператор; суммируемая с квадратом функция

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-31-60011).

Для цитирования: *Петросян Г.Г.* О сопряженных операторах для операторов дробного дифференцирования // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 284–289. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-284-289.

Abstract. On a linear manifold of the space of square summable functions on a finite segment vanishing at its ends, we consider the operator of left-sided Caputo fractional differentiation. We prove that the adjoint for it is the operator of right-sided Caputo fractional differentiation. Similar results are established for the Riemann–Liouville fractional differentiation operators. We also demonstrate that the operator, which is represented as the sum of the left-sided and the right-sided fractional differentiation operators is self adjoint. The known properties of the Caputo and Riemann–Liouville fractional derivatives are used to substantiate the results.

Keywords: Caputo fractional derivative; Riemann–Liouville fractional derivative; adjoint operator; square summable function

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-31-60011).

For citation: Petrosyan G.G. O sopryazhennykh operatorakh dlya operatorov drobnogo differentsirovaniya [On adjoint operators for fractional differentiation operators]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 284–289. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-284-289. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Г. В. Лейбница и Л. Эйлера, но лишь к концу XX века внимание к этой тематике значительно усилилось, благодаря интересным приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см. монографии [1, 2], статьи [3, 4]). На данный момент разработаны различные подходы к разрешимости дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $\alpha \in (0,1)$. Например, в работах [5,6] для указанного дробного порядка были разрешены задачи типа Коши для дифференциальных уравнений. Статьи [7, 8] посвящены исследованию траекторий дифференциальных включений дробного порядка $\alpha \in (0,1)$, подчиняющихся обобщенным краевым условиям, выраженным в форме операторных включений. В работах [9, 10] авторы приводят доказательства разрешимости периодических краевых задач для дифференциальных включений того же порядка. Аппроксимации решений дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $\alpha \in (0,1)$, были изучены в статьях [11, 12].

В последние годы активно исследуются дифференциальные уравнения и включения дробного порядка $\alpha > 1$. Естественно, основным аппаратом для исследования таких задач является классический функциональный анализ. Например, Ph. Clement, S.-O. Londen и P. Egberts в работах [13, 14] используют для разрешимости полулинейных дифференциальных уравнений дробного порядка теорию сопряженных операторов в гильбертовом пространстве. При этом авторы в данных статьях не выписывают в явном виде сопряженный оператор для оператора дробного дифференцирования, а лишь предполагают его существование в каком-то неизвестном виде. В настоящей работе мы покажем, что для оператора левостороннего дробного дифференцирования Капуто, сопряженным является оператор правостороннего дробного дифференцирования Капуто. Более того, оператор, представимый в виде суммы операторов левостороннего и правостороннего дробного дифференцирования Капуто, является самосопряженным. Аналогичные результаты справедливы и для операторов дробного дифференцирования Римана–Лиувилля.

1. Понятия и факты из дробного математического анализа

Вначале введем необходимые понятия и обозначения из дробного математического анализа (более подробные сведения можно найти в монографиях [1, 2]).

Пусть $AC[a,b]$ — пространство всех вещественных абсолютно непрерывных функций на отрезке $[a,b]$. Для натурального числа n обозначим через $AC^n[a,b]$ пространство всех вещественных функций f на отрезке $[a,b]$, имеющих непрерывные производные до $n-1$ порядка и таких, что $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$, при $n=1$, $AC^1[a,b] = AC[a,b]$. Классически будем считать $C^n[a,b]$ пространством всех вещественных n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$, а пространство суммируемых с

p-й степенью функций на отрезке $[a,b]$ обозначается через $L^p[a,b], 1 \le p < \infty$.

Определение 1.1. Левосторонним дробным интегралом порядка $\alpha \ge 0$ функции $f \in L^1[a,b]$ называется функция $I^{\alpha}_{a+}f$ следующего вида:

$$I^{\alpha}_{a+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Определение 1.2. Правосторонним дробным интегралом порядка $\alpha \ge 0$ функции $f \in L^1[a,b]$ называется функция $I^{\alpha}_{b-}f$ следующего вида:

$$I^{\alpha}_{b-}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s)\,ds.$$

Определение 1.3. Левосторонней дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha \ge 0$ функции $f \in AC^n[a,b]$ называется функция ${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f$ следующего вида:

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha}_{a+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\,ds, \quad n = [\alpha]+1.$$

Определение 1.4. Правосторонней дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha \ge 0$ функции $f \in AC^n[a,b]$ называется функция ${}^{RL}D^{\alpha}_{b-}f$ следующего вида:

$${}^{RL}D^{\alpha}_{b-}f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha}_{b-} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s)\,ds, \quad n = [\alpha]+1.$$

Определение 1.5. Левосторонней дробной производной Капуто порядка $\alpha \ge 0$ функции $f \in C^n[a,b]$ называется функция ${}^{C}D^{\alpha}_{a+}f$ следующего вида:

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\,ds, \quad n = [\alpha]+1.$$

Определение 1.6. Правосторонней дробной производной Капуто порядка $\alpha \ge 0$ функции $f \in C^n[a,b]$ называется функция ${}^{C}D^{\alpha}_{b-}f$ следующего вида:

$${}^{C}D^{\alpha}_{b-}f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\,ds, \quad n = [\alpha]+1.$$

Дробные производные Капуто порядка $\alpha \ge 0$ для функции f на отрезке $[a,b]$ связаны с дробными производными Римана–Лиувилля того же порядка $\alpha \ge 0$ посредством следующих соотношений:

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+}f(t) = \Big({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}\big(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\big)\Big)(t), \tag{1.1}$$

$${}^{C}D^{\alpha}_{b-}f(t) = \Big({}^{RL}D^{\alpha}_{b-}\big(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-s)^k\big)\Big)(t), \tag{1.2}$$

где $n = [\alpha]+1$.

Отметим, что большим преимуществом дробной производной Капуто, по сравнению с дробной производной Римана–Лиувилля, является сохранение основных свойств производной целого порядка, например, равенство нулю производной от константы.

В дробном исчислении немаловажную роль играют функции представимые в виде левостороннего (правостороннего) дробного интеграла от функции из $L^p[a,b]$, $1 \le p \le \infty$. Классы таких функций обозначают соответственно $I^\alpha_{a+}(L^p)$ и $I^\alpha_{b-}(L^p)$. Известно (см. [1]), что справедливы включения $I^\alpha_{a+}(L^p) \subset L^p[a,b]$ и $I^\alpha_{b-}(L^p) \subset L^p[a,b]$, более того при условии $\alpha > \frac{1}{p}$ функции из данных множеств являются непрерывными (гельдеровскими). Для функции $y \in I^\alpha_{a+}(L^1)$ справедливо соотношение

$$I^\alpha_{a+}\, {}^{RL}D^\alpha_{a+} y(t) = y(t),$$

соответственно для функции $y \in I^\alpha_{b-}(L^1)$ справедливо соотношение

$$I^\alpha_{b-}\, {}^{RL}D^\alpha_{b-} y(t) = y(t).$$

В тоже время (см. [2]), если $y \in C^n[a,b]$, то выполняются равенства

$$I^\alpha_{a+}\, {}^{C}D^\alpha_{a+} y(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \tag{1.3}$$

$$I^\alpha_{b-}\, {}^{C}D^\alpha_{b-} y(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k. \tag{1.4}$$

2. Полученные результаты

Для определения явного вида сопряженного оператора для операторов дробного дифференцирования вначале докажем следующее утверждение о равенстве интегралов для дробных производных Капуто.

Теорема 2.1. *Пусть для $\alpha > 0$ и $n = [\alpha] + 1$ выполняются следующие условия:*

1) функции $x, y \in C^n[a,b]$;

2) $x^{(k)}(a) = 0, k = 0,1,2,...,n-1$; $y^{(k)}(b) = 0, k = 0,1,2,...,n-1$;

3) ${}^{C}D^\alpha_{a+}x$, ${}^{C}D^\alpha_{b-}y \in L^1[a,b]$, при $\alpha \ge 1$;

4) ${}^{C}D^\alpha_{a+}x$, ${}^{C}D^\alpha_{b-}y \in L^2[a,b]$, при $0 < \alpha < 1$.

Тогда

$$\int_a^b y(t)\, {}^{C}D^\alpha_{a+} x(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, {}^{C}D^\alpha_{b-} y(t)\, dt. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся следующим соотношением, которое называют формулой дробного интегрирования по частям (см. [1]):

$$\int_a^b \varphi(t) I^\alpha_{a+}\psi(t)\, dt = \int_a^b \psi(t) I^\alpha_{b-}\varphi(t)\, dt, \tag{2.2}$$

где $\varphi \in L^p[a,b]$, $\psi \in L^q[a,b]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 1 + \alpha$, $p \ge 1, q \ge 1$.

Очевидно, что при $\alpha \geq 1$ равенство (2.2) верно для всех функций $\varphi, \psi \in L^p[a,b]$, $1 \leq p \leq \infty$, а при $0 < \alpha < 1$, равенство (2.2) верно для функций $\varphi, \psi \in L^p[a,b]$, $p \geq 2 \geq \frac{2}{1+\alpha}$.

Пусть $\alpha \geq 1$. Для функций $x, y \in C^n[a,b]$ определим $\varphi =^C D^{\alpha}_{b-}y$ и $\psi =^C D^{\alpha}_{a+}x$. Для этих функций формула (2.2) принимает вид:

$$\int_a^b {}^C D^{\alpha}_{b-}y(t) \cdot I^{\alpha}_{a+}\, {}^C D^{\alpha}_{a+}x(t)\, dt = \int_a^b {}^C D^{\alpha}_{a+}x(t) \cdot I^{\alpha}_{b-}\, {}^C D^{\alpha}_{b-}y(t)\, dt, \tag{2.3}$$

где ${}^C D^{\alpha}_{a+}x$, ${}^C D^{\alpha}_{b-}y \in L^1[a,b]$.

В силу равенств (1.3), (1.4), а также условия 2) теоремы, мы получаем (2.1).

Очевидно, что таким же образом можно установить справедливость (2.1) для $0 < \alpha < 1$, считая ${}^C D^{\alpha}_{a+}x$, ${}^C D^{\alpha}_{b-}y \in L^2[a,b]$.

Введем в рассмотрение множество $\mathcal{L} \subset L^2[a,b]$,

$$\mathcal{L} = \left\{ x \in C^n[a,b] \,|\, x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0,\ k = 0, 1, 2, ..., n-1 \right\},$$

для которого $\overline{\mathcal{L}} = L^2[a,b]$.

Для функций $x \in \mathcal{L}$, в силу равенств (1.3), (1.4) мы имеем:

$$I^{\alpha}_{a+}\, {}^C D^{\alpha}_{a+}x(t) = x(t),$$

$$I^{\alpha}_{b-}\, {}^C D^{\alpha}_{b-}x(t) = x(t).$$

Отметим также, что для функций $x \in \mathcal{L}$ в силу соотношений (1.1), (1.2), мы имеем

$${}^C D^{\alpha}_{a+}x =^{RL} D^{\alpha}_{a+}x,\ {}^C D^{\alpha}_{b-}x =^{RL} D^{\alpha}_{b-}x,$$

поэтому равенство (2.1) при наложенных в теореме 2.1 условиях, справедливо и для дробных производных Римана–Лиувилля:

$$\int_a^b y(t)\, {}^{RL} D^{\alpha}_{a+}x(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, {}^{RL} D^{\alpha}_{b-}y(t)\, dt. \tag{2.4}$$

Из равенства (2.1) следует, что на линейном многообразии $\mathcal{L}$ операторы ${}^C D^{\alpha}_{a+}$ и ${}^C D^{\alpha}_{b-}$ являются сопряженным. Соответственно из (2.4) следует, что на линейном многообразии $\mathcal{L}$ операторы ${}^{RL} D^{\alpha}_{a+}$ и ${}^{RL} D^{\alpha}_{b-}$ также являются сопряженными.

Если же мы на $\mathcal{L}$ будем рассматривать оператор ${}^C D^{\alpha}_{a+} +^C D^{\alpha}_{b-}$, то легко можно показать, что он является самосопряженным:

$$\int_a^b y(t)\, ({}^C D^{\alpha}_{a+} +^C D^{\alpha}_{b-})x(t)\, dt = \int_a^b y(t)\, {}^C D^{\alpha}_{a+}x(t)\, dt + \int_a^b y(t)\, {}^C D^{\alpha}_{b-}x(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b x(t)\, {}^C D^{\alpha}_{b-}y(t)\, dt + \int_a^b x(t)\, {}^C D^{\alpha}_{a+}y(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, ({}^C D^{\alpha}_{a+} +^C D^{\alpha}_{b-})y(t)\, dt,$$

где $x, y \in \mathcal{L}$.

Очевидно, аналогично можно показать, что оператор ${}^{RL} D^{\alpha}_{a+} +^{RL} D^{\alpha}_{b-}$ является самосопряженным на $\mathcal{L}$.

References

[1] S. G. Samco, A. A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.

[2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam, 2006.

[3] F. Mainardi, S. Rionero, T. Ruggeri, "On the initial value problem for the fractional diffusionwave equation", *Waves and Stability in Continuous Media*, 1994, 246–251.

[4] M. Afanasova, Y. Ch. Liou, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, "On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space", *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **20**:9 (2019), 1919–1935.

[5] J. Appell, B. Lopez, K. Sadarangani, "Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives", *J. Nonlinear Var. Anal.*, 2018, № 2, 25–33.

[6] T. D. Ke, N.V. Loi, V. Obukhovskii, "Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2015, № 18, 531–553.

[7] М. С. Афанасова, Г. Г. Петросян, "О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с обобщенным начальным условием в банаховом пространстве", *Известия вузов. Математика*, 2019, № 9, 3–15; англ. пер.:M. Afanasova, G. Petrosyan, "On the boundary value problem for functional differential inclusion of fractional order with general initial condition in a Banach space", *Russian Mathematics*, **63**:9 (2019), 1–11.

[8] I. Benedetti, V. Obukhovskii, V. Taddei, "On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2017, № 20, 1424–1446.

[9] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space", *Applicable Analysis*, **97**:4 (2018), 571–591.

[10] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional–Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space", *Mathematics, Special Issue "Fixed Point, Optimization, and Applications"*, **7**:12 (2019), 5–19.

[11] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions", *Fixed Point Theory and Applications*, 2019, № 2.

[12] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces", *Fixed Point Theory and Applications*, **28**:4 (2017), 1–28.

[13] Ph. Clement, S.-O. Londen, "On the sum of fractional derivatives and m-accretive operators", *Mathematical Research*, **64** (1994), 91–100.

[14] P. Egberts, "On the sum of maximal monotone operators and an application to a nonlinear integro-differential equation", *Differential Integral Equations*, **6**:5 (1993), 1187–1194.

Информация об авторе

Петросян Гарик Гагикович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник научно-образовательного центра. Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8154-6299

Поступила в редакцию 29.06.2020
Поступила после рецензирования 10.08.2020
Принята к публикации 09.09.2020

Information about the author

Garik G. Petrosyan, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher of the Research Center. Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation. E-mail:garikpetrosyan@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8154-6299

Received 29.06.2020
Reviewed 10.08.2020
Accepted for press 09.09.2020